

ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \quad \alpha \neq 0$$

Η αλγεβρική παράσταση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ καλείται τριώνυμο 2^{ου} βαθμού, ενώ κάθε εξίσωση που μπορούμε να φέρουμε στη μορφή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ καλείται δευτεροβάθμια εξίσωση.

Τρία πράγματα μας ενδιαφέρουν σε ό,τι αφορά το τριώνυμο 2^{ου} βαθμού:

- Επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης
- Πρόσημο τριωνύμου
(δηλαδή επίλυση της δευτεροβάθμιας ανίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma \leq$ ή ≥ 0)
- Παραγοντοποίηση του τριωνύμου (γραφή του αθροίσματος σε μορφή γινομένου)

Για ΟΛΑ τα παραπάνω είμαστε αναγκασμένοι να περάσουμε μέσα από τη διαδικασία υπολογισμού της **διακρίνουσας** του τριωνύμου, δηλαδή της ποσότητας: $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

Έπειτα διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\Delta > 0$

Το τριώνυμο έχει δύο πραγματικές ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Επιπλέον το τριώνυμο μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως εξής:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$$

Επιπλέον το πρόσημο του τριωνύμου (επίλυση τριωνυμικής ανίσωσης) είναι:

| | | | | | |
|---------------------------------|----------------------|-------------|------------------------|-------------|----------------------|
| x | $-\infty$ | x_1 | x_2 | $+\infty$ | |
| $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ | ομόσημο του α | \emptyset | ετερόσημο του α | \emptyset | ομόσημο του α |

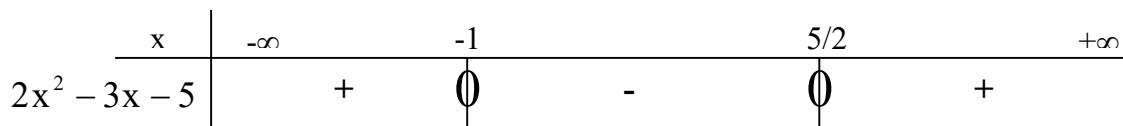
πχ Το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 5$ ($\alpha=2$, $\beta=-3$, $\gamma=-5$) έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 9 + 40 = 49 > 0 \text{ και ρίζες:}$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 7}{4} \Rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{5}{2}$$

$$\text{Άρα παραγοντοποιείται ως: } 2x^2 - 3x - 5 = 2(x+1)\left(x - \frac{5}{2}\right)$$

ενώ το πρόσημο του είναι:



- $\Delta = 0$

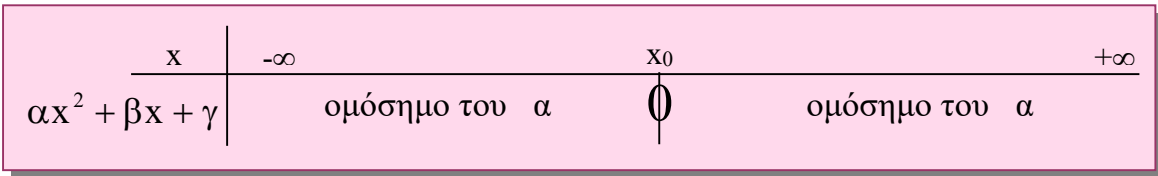
Το τριώνυμο έχει μία διπλή πραγματική ρίζα την:

$$x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha}$$

Επιπλέον το τριώνυμο μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως εξής:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_0)^2$$

Επιπλέον το πρόσημο το τριωνύμου (επίλυση τριωνυμικής ανίσωσης) είναι:

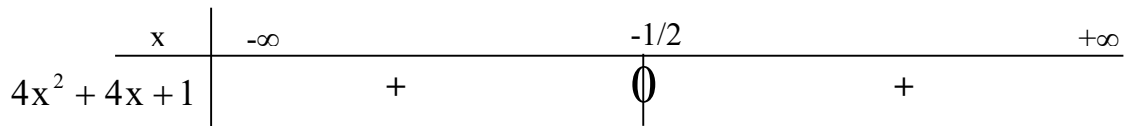


πχ Το τριώνυμο $4x^2+4x+1$ ($\alpha=4, \beta=4, \gamma=1$) έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0 \text{ και ρίζα: } x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-4}{2 \cdot 4} = -\frac{1}{2}$$

Άρα παραγοντοποιείται ως: $4x^2 + 4x + 1 = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

ενώ το πρόσημο του είναι:



Παρατήρηση: Όποιο τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta=0$, μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως τέλειο τετράγωνο μέσω της γνωστής ταυτότητας: $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$. Παρατηρήστε ότι στο παράδειγμά μας αυτό συμβαίνει για $A=2x$ και $B=1$, δηλαδή μπορούμε να γράψουμε: $4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$.

- $\Delta < 0$

Το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες και δεν παραγοντοποιείται.

Επιπλέον το πρόσημο το τριωνύμου (επίλυση τριωνυμικής ανίσωσης) είναι:

| | | |
|---------------------------------|----------------------|-----------|
| x | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ | ομόσημο του α | |

Εφαρμογές:

1. Να λυθεί η εξίσωση: $(x - 3)(x + 1) + (x - 1)^2 = (x + 1)^2$

Έχουμε μία εξίσωση που δεν αντιστοιχεί σε κάποια γνωστή μορφή. Βγάζουμε παρενθέσεις (με επιμεριστικές / ταυτότητες) και κάνουμε αναγωγή όμοιων όρων για να δούμε πού θα καταλήξουμε:

$$(x - 3)(x + 1) + (x - 1)^2 = (x + 1)^2$$

$$x^2 - 2x - 3 + x^2 - 2x + 1 = x^2 + 2x + 1$$

$$2x^2 - 4x - 2 - x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x^2 - 6x - 3 = 0$$

Καταλήγουμε λοιπόν σε μία δευτεροβάθμια εξίσωση, την οποία έχουμε φέρει στη γνωστή μορφή του τριωνύμου 2^{ου} βαθμού με $\alpha=1$, $\beta=-6$ και $\gamma=-3$.

Άρα, το τριώνυμο αυτό έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 36 + 12 = 48 > 0, \text{ συνεπώς θα έχει δύο}$$

πραγματικές ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{48}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{4^2 \cdot 3}}{2} = \frac{6 \pm 4\sqrt{3}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{3}$$

2. Να λυθεί η εξίσωση: $2(x^2 + 2) + 2x^2 = x^2(x^2 + 2)$

Έχουμε μία εξίσωση που δεν αντιστοιχεί σε κάποια γνωστή μορφή. Βγάζουμε παρενθέσεις (με επιμεριστικές / ταυτότητες) και κάνουμε αναγωγή όμοιων όρων για να δούμε πού θα καταλήξουμε:

$$2(x^2 + 2) + 2x^2 = x^2(x^2 + 2)$$

$$2x^2 + 4 + 2x^2 = x^4 + 2x^2$$

$$x^4 - 2x^2 - 4 = 0$$

Καταλήγουμε λοιπόν σε μία πολυωνυμική εξίσωση, η οποία περιέχει 4^ο βάθμιο (x^4), 2^ο βάθμιο ($-2x^2$) και σταθερό (-4) όρο.

Τέτοιες εξισώσεις λέγονται **ΔΙΤΕΤΡΑΓΩΝΕΣ**, αφού αν θέσουμε: $y = x^2 \geq 0$, μπορούμε να τις μετασχηματίσουμε σε τριώνυμο 2^{ου} βαθμού. Πράγματι, μετά την αντικατάσταση, η συγκεκριμένη εξίσωση γίνεται: $y^2 - 2y^2 - 4 = 0$, δηλαδή ένα τριώνυμο 2^{ου} βαθμού με $\alpha=1$, $\beta=-2$ και $\gamma=-4$.

Άρα, το τριώνυμο αυτό έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 4 + 16 = 20 > 0$$

και συνεπώς έχει δύο πραγματικές ρίζες τις:

$$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{20}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 \cdot 5}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

Επειδή είχαμε θέσει: $y = x^2 \geq 0$ και επειδή $y = 1 - \sqrt{5} < 0$, δεκτή λύση είναι μόνο η

$$y = 1 + \sqrt{5} \Rightarrow x^2 = 1 + \sqrt{5} \Rightarrow x = \pm \sqrt{1 + \sqrt{5}}$$

Ασκήσεις:

Να λυθούν οι εξισώσεις/ανισώσεις:

(i) $x^2 - 5x + 7 = 0$

(ii) $3x^2 + 2x - 5 \geq 0$

(iii) $2 - 5x(2 - x) + x < 3x^2 - 7x - (x - 3)$