ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ:

$$\boxed{\alpha x^2+\beta x+\gamma=0\ ,\quad \alpha\neq 0}$$

Η αλγεβρική παράσταση **$\alpha x^2+\beta x+\gamma$** καλείται τριώνυμο 2ου βαθμού, ενώ κάθε εξίσωση που μπορούμε να φέρουμε στη μορφή **$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$** με $\alpha\neq 0$ καλείται δευτεροβάθμια εξίσωση.

Τρία πράγματα μας ενδιαφέρουν σε ό,τι αφορά το τριώνυμο 2ου βαθμού:

- Επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης
- Πρόσημο τριωνύμου
  (*δηλαδή επίλυση της δευτεροβάθμιας ανίσωσης* $\alpha x^2+\beta x+\gamma\ \leq$ ή $\geq\ 0$)
- Παραγοντοποίηση του τριωνύμου (γραφή του αθροίσματος σε μορφή γινομένου)

Για ΟΛΑ τα παραπάνω είμαστε αναγκασμένοι να περάσουμε μέσα από τη διαδικασία υπολογισμού της **διακρίνουσας** του τριωνύμου, δηλαδή της ποσότητας: $\boxed{\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma}$

Έπειτα διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\boxed{\Delta>0}$

  Το τριώνυμο έχει δύο πραγματικές ρίζες τις: $\boxed{x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}}$

  Επιπλέον το τριώνυμο μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως εξής:

  $\boxed{\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2)}$

  Επιπλέον το πρόσημο το τριωνύμου (επίλυση τριωνυμικής ανίσωσης) είναι:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$\alpha x^2+\beta x+\gamma$	ομόσημο του α		0	ετερόσημο του α	0	ομόσημο του α	

πχ Το τριώνυμο $2x^2-3x-5$ ($\alpha=2$, $\beta=-3$, $\gamma=-5$) έχει διακρίνουσα:

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-3)^2-4\cdot 2(-5)=9+40=49>0$ και ρίζες:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{49}}{2\cdot 2}=\frac{3\pm 7}{4}\Rightarrow x_1=-1\ ,\ x_2=\frac{5}{2}$$

Άρα παραγοντοποιείται ως: $2x^2-3x-5\ =\ 2(x+1)\left(x-\dfrac{5}{2}\right)$

ενώ το πρόσημο του είναι:

x	$-\infty$		-1		$5/2$		$+\infty$
$2x^2-3x-5$		+	0	-	0	+	

- $\boxed{\Delta=0}$

  Το τριώνυμο έχει μία διπλή πραγματική ρίζα την: $\boxed{x_0=\dfrac{-\beta}{2\alpha}}$

  Επιπλέον το τριώνυμο μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως εξής:

  $\boxed{\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_0)^2}$

  Επιπλέον το πρόσημο το τριωνύμου (επίλυση τριωνυμικής ανίσωσης) είναι:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$\alpha x^2+\beta x+\gamma$		ομόσημο του α	0	ομόσημο του α	

πχ Το τριώνυμο $4x^2+4x+1$ ($\alpha=4$, $\beta=4$, $\gamma=1$) έχει διακρίνουσα:

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=4^2-4\cdot4\cdot1=0$ και ρίζα: $x_0=\dfrac{-\beta}{2\alpha}=\dfrac{-4}{2\cdot4}=-\dfrac{1}{2}$

Άρα παραγοντοποιείται ως: $4x^2+4x+1=4\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2$

ενώ το πρόσημο του είναι:

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
$4x^2+4x+1$		+	0	+	

Παρατήρηση: Όποιο τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta=0$, μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως τέλειο τετράγωνο μέσω της γνωστής ταυτότητας: $(A\pm B)^2=A^2\pm2AB+B^2$. Παρατηρήστε ότι στο παράδειγμά μας αυτό συμβαίνει για $A=2x$ και $B=1$, δηλαδή μπορούμε να γράψουμε: $4x^2+4x+1=(2x+1)^2$.

- $\boxed{\Delta < 0}$

Το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες και δεν παραγοντοποιείται.

Επιπλέον το πρόσημο το τριωνύμου (επίλυση τριωνυμικής ανίσωσης) είναι:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$	ομόσημο του α

Εφαρμογές:

1. Να λυθεί η εξίσωση: $(x-3)(x+1)+(x-1)^2=(x+1)^2$

Έχουμε μία εξίσωση που δεν αντιστοιχεί σε κάποια γνωστή μορφή. Βγάζουμε παρενθέσεις (με επιμεριστικές / ταυτότητες) και κάνουμε αναγωγή όμοιων όρων για να δούμε πού θα καταλήξουμε:

$$(x-3)(x+1)+(x-1)^2=(x+1)^2$$
$$x^2-2x-3+x^2-2x+1=x^2+2x+1$$
$$2x^2-4x-2-x^2-2x-1=0$$
$$x^2-6x-3=0$$

Καταλήγουμε λοιπόν σε μία δευτεροβάθμια εξίσωση, την οποία έχουμε φέρει στη γνωστή μορφή του τριωνύμου $2^{ου}$ βαθμού με α=1 , β=-6 και γ=-3.

Άρα, το τριώνυμο αυτό έχει διακρίνουσα:

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-6)^2-4\cdot 1\cdot(-3)=36+12=48>0$, συνεπώς θα έχει δύο πραγματικές ρίζες τις:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{48}}{2\cdot 1}=\frac{6\pm\sqrt{4^2 3}}{2}=\frac{6\pm 4\sqrt{3}}{2}=3\pm 2\sqrt{3}$$

2. Να λυθεί η εξίσωση: $2(x^2+2)+2x^2=x^2(x^2+2)$

Έχουμε μία εξίσωση που δεν αντιστοιχεί σε κάποια γνωστή μορφή. Βγάζουμε παρενθέσεις (με επιμεριστικές / ταυτότητες) και κάνουμε αναγωγή όμοιων όρων για να δούμε πού θα καταλήξουμε:

$$2(x^2+2)+2x^2=x^2(x^2+2)$$
$$2x^2+4+2x^2=x^4+2x^2$$
$$x^4-2x^2-4=0$$

Καταλήγουμε λοιπόν σε μία πολυωνυμική εξίσωση, η οποία περιέχει 4ο βάθμιο (**x^4**), 2ο βάθμιο (**$-2x^2$**) και σταθερό (**-4**) όρο.

Τέτοιες εξισώσεις λέγονται **ΔΙΤΕΤΡΑΓΩΝΕΣ**, αφού αν θέσουμε: **$y=x^2\geq 0$** , μπορούμε να τις μετασχηματίσουμε σε τριώνυμα 2ου βαθμού. Πράγματι, μετά την αντικατάσταση, η συγκεκριμένη εξίσωση γίνεται: $y^2-2y^2-4=0$, δηλαδή ένα τριώνυμο 2ου βαθμού με α=1 , β=-2 και γ=-4.

Άρα, το τριώνυμο αυτό έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-4)=4+16=20>0$$

και συνεπώς έχει δύο πραγματικές ρίζες τις:

$$y_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{20}}{2\cdot1}=\frac{2\pm\sqrt{2^2 5}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{5}}{2}=1\pm\sqrt{5}$$

Επειδή είχαμε θέσει: $y=x^2\geq 0$ και επειδή $y=1-\sqrt{5}<0$, δεκτή λύση είναι μόνο η

$$y=1+\sqrt{5}\ \Rightarrow\ x^2=1+\sqrt{5}\ \Rightarrow\ x=\pm\sqrt{1+\sqrt{5}}$$

Ασκήσεις:

Να λυθούν οι εξισώσεις/ανισώσεις:

(i) $x^2-5x+7=0$

(ii) $3x^2+2x-5\geq 0$

(iii) $2-5x(2-x)+x<3x^2-7x-(x-3)$